Granice funkcji

50 zadań do samodzielnego rozwiązania + odpowiedzi

Jak korzystać z arkusza

Najpierw rozwiąż zadania bez zaglądania do klucza. Odpowiedzi i krótkie wskazówki znajdziesz na końcu pliku. Granice trygonometryczne liczymy w radianach.

Dostępne online: https://calcula.com.pl/granice-zadania-z-rozwiazaniami.

Część I. Zadania

01. Różnica kwadratów

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

02. Sprzężenie pierwiastka

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$$

03. Iloraz wielomianów

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2-x+1}{x^2+2}$$

04. Granice jednostronne

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

05. Granica prowadząca do liczby e

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$$

06. Reguła de l'Hospitala

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

07. Różnica kwadratów

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

08. Trójmian kwadratowy

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x+1}$$

09. Różnica sześcianów

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

10. Kwadrat sumy

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+3)^2-9}{x}$$

11. Rozkład na dwa czynniki

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$$

12. Suma sześcianów

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$$

13. Potęgi parzyste

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}$$

14. Wyłączanie wspólnego czynnika

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 7x}{x}$$

15. Pierwiastek z x

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

16. Pierwiastek z 1 + x

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$$

17. Pierwiastek z 4 + x

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$$

18. Pierwiastek w punkcie 3

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$$

19. Różnica dwóch pierwiastków

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - x}}{x}$$

20. Pierwiastek w mianowniku

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{4 + x} - 2}$$

21. Równe stopnie wielomianów

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 + 1}{2x^2 - 3}$$

22. Wielomiany stopnia trzeciego

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3 - x}{x^3 + 4}$$

23. Wyższy stopień mianownika

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 3}{x^3 + 2}$$

24. Wyższy stopień licznika

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - x}{x^2 + 1}$$

25. Kierunek przy minus nieskończoności

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 - x}{x^2 + 1}$$

26. Niewymierność przy nieskończoności

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$$

27. Dążenie do zera z prawej

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}$$

28. Dążenie do zera z lewej

$$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x}$$

29. Logarytm przy zerze

$$\lim_{x\to0^+} \ln x$$

30. Dodatnia odwrotność kwadratu

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2}$$

31. Asymptota pionowa z lewej

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1}$$

32. Asymptota pionowa z prawej

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1}$$

33. Sinus podwojonego kąta

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$$

34. Sinus i stała w mianowniku

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{3x}$$

35. Tangens przy zerze

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$$

36. Jeden minus cosinus

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

37. Kwadrat sinusa

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

38. Iloraz sinusów

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$$

39. Granica prowadząca do e³

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$$

40. Granica prowadząca do e⁻²

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$$

41. Klasyczna granica przy zerze

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

42. Parametr wewnątrz potęgi

$$\lim_{x\to 0}(1+4x)^{1/x}$$

43. Logarytm w liczniku

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

44. Eksponenta i pochodna w zerze

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$$

45. Drugi rząd funkcji wykładniczej

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1-x}{x^2}$$

46. Drugi rząd logarytmu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

47. Sinus minus argument

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$$

48. Eksponenta podzielona przez sinus

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$$

49. Logarytm wolniejszy od x

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}$$

50. Dwie funkcje wykładnicze

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}$$

Klucz odpowiedzi

Zwięzłe wskazówki do wszystkich 50 zadań

01. Różnica kwadratów

$$6$$

Skróć czynnik x−3; pozostaje x+3.

02. Sprzężenie pierwiastka

$$\frac{1}{6}$$

Po pomnożeniu przez sprzężenie zostaje 1/(√(x+5)+3).

03. Iloraz wielomianów

$$3$$

Podziel licznik i mianownik przez x².

04. Granice jednostronne

nie istnieje

Z lewej granica wynosi −1, a z prawej 1.

05. Granica prowadząca do liczby e

$$e^2$$

Wykorzystaj (1+a/x)^x→e^a.

06. Reguła de l’Hospitala

$$1$$

W radianach: sin x/x→1; pochodne to cos x i 1.

07. Różnica kwadratów

$$4$$

Rozłóż licznik na czynniki.
Dla x ≠ 2 skróć (x−2): pozostaje x+2. Następnie podstaw x=2.

08. Trójmian kwadratowy

$$1$$

Rozłóż trójmian na (x+1)(x+2).
Dla x ≠ −1 skróć x+1; granica x+2 przy x→−1 wynosi 1.

09. Różnica sześcianów

$$3$$

Zastosuj wzór a³−b³=(a−b)(a²+ab+b²).
Skrócenie czynnika x−1 daje x²+x+1; po podstawieniu 1 otrzymujemy 3.

10. Kwadrat sumy

$$6$$

Rozwiń kwadrat sumy i zredukuj wyrazy stałe.
Licznik to $x^2+6x=x(x+6)$. Dla $x \neq 0$ zostaje $x+6$.

11. Rozkład na dwa czynniki

$$-1$$

Zapisz licznik jako $(x-2)(x-3)$.
Po skróceniu wyrażenie ma postać $x-3$; podstawienie 2 daje -1.

12. Suma sześcianów

$$12$$

Zastosuj wzór $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
Dla $x \neq -2$ skracamy $x+2$; pozostaje x^2-2x+4, czyli $4+4+4$.

13. Potęgi parzyste

$$2$$

W liczniku rozpoznaj różnicę kwadratów.
$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)$. Dla $x \neq \pm 1$ zostaje x^2+1.

14. Wyłączanie wspólnego czynnika

$$7$$

Wyłącz x przed nawias w liczniku.
$x(x+7)/x=x+7$ dla $x \neq 0$; w granicy otrzymujemy 7.

15. Pierwiastek z x

$$\frac{1}{6}$$

Pomnóż licznik i mianownik przez sprzężenie $\sqrt{x}+3$.
Po zastosowaniu różnicy kwadratów mianownik $x-9$ skraca się; zostaje $1/(\sqrt{x}+3)$.

16. Pierwiastek z 1 + x

$$\frac{1}{2}$$

Zastosuj sprzężenie $\sqrt{(1+x)}+1$.
Po pomnożeniu otrzymujesz $x/[x(\sqrt{(1+x)}+1)]$ i skracasz x.

17. Pierwiastek z 4 + x

$$\frac{1}{4}$$

Zastosuj sprzężenie $\sqrt{(4+x)}+2$.
Różnica kwadratów w liczniku to x; pozostaje odwrotność $\sqrt{(4+x)}+2$.

18. Pierwiastek w punkcie 3

$$\frac{1}{4}$$

Użyj sprzężenia $\sqrt{(x+1)}+2$.
Licznik przekształca się do $x-3$, co pozwala skrócić mianownik.

19. Różnica dwóch pierwiastków

$$\frac{3}{2}$$

Pomnóż przez sumę obu pierwiastków.
Różnica podpierwiastkowych wyrażeń wynosi 3x. Po skróceniu x: 3/[√(1+2x)+√(1−x)].

20. Pierwiastek w mianowniku

$$4$$

Pomnóż przez sprzężenie mianownika.
Po usunięciu niewymierności dostajemy √(4+x)+2, więc granica to 4.

21. Równe stopnie wielomianów

$$\frac{5}{2}$$

Podziel licznik i mianownik przez x^2.
Składniki $1/x^2$ i $3/x^2$ dążą do 0; zostaje 5/2.

22. Wielomiany stopnia trzeciego

$$3$$

Podziel obie części ułamka przez x^3.
Po przejściu do granicy wyrazy z $1/x^2$ i $1/x^3$ znikają.

23. Wyższy stopień mianownika

$$0$$

W mianowniku dominuje x^3, a w liczniku x^2.
Po podzieleniu przez x^3 licznik dąży do 0, mianownik do 1.

24. Wyższy stopień licznika

$$+\infty$$

Porównaj największe potęgi w liczniku i mianowniku.
Iloraz zachowuje się jak 2x przy $x\to+\infty$ i rośnie bez ograniczeń.

25. Kierunek przy minus nieskończoności

$$-\infty$$

Sprawdź znak dominującego ilorazu $2x^3/x^2$.
Zachowanie jest takie jak 2x, więc przy $x\to-\infty$ wynik to $-\infty$.

26. Niewymierność przy nieskończoności

$$\frac{3}{2}$$

Użyj sprzężenia $\sqrt{(x^2+3x)}+x$.
Dla $x>0$ dostajemy $3x/[\sqrt{(x^2+3x)}+x] = 3/[\sqrt{(1+3/x)}+1]$.

27. Dążenie do zera z prawej

$$+\infty$$

Ustal znak mianownika dla $x>0$.
Dodatnie liczby coraz bliższe zeru dają coraz większe wartości odwrotności.

28. Dążenie do zera z lewej

$$-\infty$$

Ustal znak x, gdy do zera zbliżasz się z lewej.
Odwrotności ujemnych liczb bliskich zeru maleją bez ograniczeń.

29. Logarytm przy zerze

$$-\infty$$

Uwzględnij dziedzinę ln x, czyli x>0.
Gdy x maleje do zera od prawej, ln x zmierza do minus nieskończoności.

30. Dodatnia odwrotność kwadratu

$$+\infty$$

Potęga druga usuwa ujemny znak mianownika.
Wartość x^2 jest dodatnia i dąży do zera; jej odwrotność rośnie bez ograniczeń.

31. Asymptota pionowa z lewej

$$-\infty$$

Gdy x<1, różnica x−1 jest ujemna.
Mianownik zbliża się do zera od strony ujemnej.

32. Asymptota pionowa z prawej

$$+\infty$$

Gdy x>1, różnica x−1 jest dodatnia.
Mianownik zbliża się do zera od strony dodatniej.

33. Sinus podwojonego kąta

$$2$$

Wykorzystaj granicę sin t/t = 1 dla t→0 (radiany).
Przepisz sin(2x)/x = 2·sin(2x)/(2x).

34. Sinus i stała w mianowniku

$$\frac{5}{3}$$

Sprowadź ułamek do podstawowej granicy sin(5x)/(5x).
Wyłącz czynnik 5/3; pozostała granica jest równa 1.

35. Tangens przy zerze

$$1$$

Zapisz tan x=sin x/cos x (radiany).
Ułamek rozdziela się na (sin x/x)·(1/cos x). Oba czynniki dążą do 1.

36. Jeden minus cosinus

$$\frac{1}{2}$$

Skorzystaj z tożsamości $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$.
Dostajemy $(1/2)\cdot[\sin(x/2)/(x/2)]^2$, co dąży do 1/2.

37. Kwadrat sinusa

$$1$$

Zapisz iloraz jako kwadrat sin x/x.
Korzystając z podstawowej granicy, otrzymujemy $1^2=1$.

38. Iloraz sinusów

$$\frac{3}{2}$$

Pomnóż i podziel tak, by otrzymać dwa ilorazy sin t/t.
Przekształcenie daje (3/2)·[sin(3x)/(3x)]·[(2x)/sin(2x)].

39. Granica prowadząca do e³

$$e^3$$

Wykorzystaj klasyczną granicę (1+a/n)^n→e^a.
Tutaj a=3. Podstawa dąży do 1, ale wykładnik równocześnie rośnie.

40. Granica prowadząca do e⁻²

$$e^{-2}$$

Użyj tej samej granicy z parametrem a=−2.
Dla dużych n podstawa jest dodatnia; wynik to e do potęgi −2.

41. Klasyczna granica przy zerze

$$e$$

Rozpoznaj postać 1 do potęgi nieskończoność.
Logarytm wyrażenia to ln(1+x)/x, który dąży do 1; stąd wynik e.

42. Parametr wewnątrz potęgi

$$e^4$$

Zapisz 1/x jako 4/(4x).
Dostajemy [(1+4x)^(1/(4x))]^4, więc granica wynosi e^4.

43. Logarytm w liczniku

$$1$$

Skorzystaj ze standardowej granicy logarytmicznej.
Można również zastosować de l'Hospitala: $(\ln(1+x))'=1/(1+x)$.

44. Eksponenta i pochodna w zerze

$$2$$

Użyj (e^t−1)/t→1 przy t→0.
Przekształć wyrażenie do 2·(e^(2x)−1)/(2x).

45. Drugi rząd funkcji wykładniczej

$$\frac{1}{2}$$

Sprawdź 0/0 i dwukrotnie zastosuj de l'Hospitala.
Pierwszy iloraz pochodnych to (e^x−1)/(2x), drugi to e^x/2 → 1/2.

46. Drugi rząd logarytmu

$$-\frac{1}{2}$$

Sprawdź warunki i użyj de l'Hospitala (ewentualnie rozwinięcia Taylora).
Po pierwszym różniczkowaniu: (1/(1+x)−1)/(2x)=−1/[2(1+x)] dla x ≠ 0.

47. Sinus minus argument

$$-\frac{1}{6}$$

Po kolejnych nieoznaczonościach 0/0 stosuj de l'Hospitala.
Trzykrotne różniczkowanie daje (−cos x)/6 → −1/6. Kąty w radianach.

48. Eksponenta podzielona przez sinus

$$1$$

Zastosuj regułę de l'Hospitala lub iloczyn dwóch granic.
Iloraz pochodnych ma postać e^x/cos x, więc dąży do 1.

49. Logarytm wolniejszy od x

$$0$$

Otrzymujesz nieoznaczoność ∞/∞.
Reguła de l'Hospitala daje iloraz (1/x)/1, który dąży do 0.

50. Dwie funkcje wykładnicze

$$1$$

Po sprawdzeniu 0/0 zastosuj de l'Hospitala.
Pochodna licznika to e^x+e^(−x), mianownika 2. W x=0: (1+1)/2=1.