Macierze: 50 zadań

Darmowy arkusz do samodzielnej pracy z odpowiedziami

Jak korzystać? Najpierw rozwiąż zadania bez zaglądania do klucza. Rozwiązania i krótkie wskazówki znajdziesz w drugiej części PDF.

Pełne rozwiązania online: https://calcula.com.pl/macierze-zadania-z-rozwiazaniami

Część I. Zadania

Przykłady przekrojowe

01. Pomnóż dwie macierze 2×2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

02. Oblicz wyznacznik macierzy 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

03. Wyznacz macierz odwrotną 2×2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

04. Wyznacz rząd macierzy.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

05. Rozwiąż układ metodą Cramera.

Układ: x+y=5; 2x-y=1

06. Rozwiąż układ trzech równań eliminacją Gaussa.

Układ: x+y+z=6; 2x+y-z=1; x-y+2z=5

Działania na macierzach

07. Oblicz A + B dla macierzy 2×2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

08. Oblicz A - B dla macierzy 2×3.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

09. Oblicz 2A + B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Oblicz 3A - 2B.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

11. **Wyznacz macierz transponowaną A^T.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

12. **Sprawdź, czy macierz A jest symetryczna.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

13. **Oblicz ślad macierzy A.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

14. **Znajdź macierz X z równania X + A = B.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Mnożenie macierzy

15. **Oblicz AB dla dwóch macierzy 2×2.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

16. **Oblicz BA dla macierzy z zadania 15.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

17. **Pomnóż macierz 2×3 przez macierz 3×2.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

18. **Pomnóż macierz 3×2 przez macierz 2×3.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

19. **Oblicz kwadrat macierzy A^2.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

20. **Oblicz AI dla macierzy jednostkowej I_3.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21. **Pomnóż wiersz 1×3 przez kolumnę 3×1.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

22. **Pomnóż dwie macierze diagonalne.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Wyznaczniki

23. Oblicz wyznacznik macierzy 2×2.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

24. Oblicz wyznacznik macierzy 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

25. Oblicz wyznacznik macierzy trójkątnej.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

26. Wyznacz det(A), gdy dwa wiersze są identyczne.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

27. Porównaj det(A) i det(A^T).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

28. Oblicz det(2A) dla A rozmiaru 2×2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

29. Oblicz det(AB) bez mnożenia całych macierzy.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Macierz odwrotna

30. **Wyznacz A^{-1} dla macierzy 2×2.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

31. **Wyznacz A^{-1}, gdy wyznacznik jest ujemny.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

32. **Wyznacz A^{-1} z ułamkami w wyniku.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

33. **Sprawdź, czy macierz A jest odwracalna.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

34. **Rozwiąż równanie macierzowe AX = B.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

35. **Sprawdź iloczyn AA^{-1}.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rząd macierzy

36. **Wyznacz rząd odwracalnej macierzy 2×2.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

37. Wyznacz rząd macierzy z proporcjonalnymi wierszami.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

38. Wyznacz rząd macierzy 3×3 (rząd 2).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

39. Wyznacz rząd pełnej macierzy 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

40. Wyznacz rząd prostokątnej macierzy 3×2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

41. Wyznacz rząd prostokątnej macierzy 2×3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Układy równań

42. Rozwiąż układ 2×2 metodą Gaussa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Układ: 1x + (2)y = 5; 2x + (-1)y = 5

43. Rozwiąż układ z ujemnymi współczynnikami.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Układ: 2x + (-1)y = -8; -1x + (3)y = 14

44. Rozwiąż układ trzech równań liniowych.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Układ: 1x + (1)y + (1)z = 4; 2x + (-1)y + (1)z = 8; 1x + (2)y + (-1)z = -3

45. Sprawdź, czy układ ma rozwiązanie.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Układ: x + 2y = 3; 2x + 4y = 8

46. Wyznacz wszystkie rozwiązania układu zależnego.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Układ: x + 2y = 5; 2x + 4y = 10

47. Rozwiąż układ 2×2 metodą Cramera.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Układ: 3x + (1)y = 5; 1x + (2)y = 0

Zadania przekrojowe

48. Rozwiąż równanie 2X + A = B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

49. Dla jakich t macierz A jest osobliwa?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{pmatrix}$$

50. Oblicz A^3, wykorzystując A^2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Część II. Klucz odpowiedzi i wskazówki

Przed sprawdzeniem wyniku warto samodzielnie wykonać pierwszy krok. Pełne opisy znajdują się również na stronie Calculi.

Przykłady przekrojowe

01. Pomnóż dwie macierze 2×2.

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

Wynik powstaje przez mnożenie wierszy A przez kolumny B. Pierwszy wiersz: 1·2+2·4=10 i 1·1+2·(-1)=-1; drugi: 0·2+3·4=12 i 0·1+3·(-1)=-3.

02. Oblicz wyznacznik macierzy 3×3.

Wynik: det(A) = -19

Reguła Sarrusa: suma przekątnych w prawo daje 0. Suma przekątnych w lewo to 19, więc det(A) = 0 - 19 = -19.

03. Wyznacz macierz odwrotną 2×2.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Wyznacznik to 2·3-1·5=1, zatem odwrotność istnieje. Zamień miejscami elementy przekątnej, a dwóm pozostałym zmień znak; podziel przez wyznacznik.

04. Wyznacz rząd macierzy.

Wynik: r(A) = 2

Odejmij od drugiego wiersza podwojony pierwszy. Powstanie wiersz zerowy. Pozostałe dwa niezerowe wiersze są liniowo niezależne: r(A)=2.

05. Rozwiąż układ metodą Cramera.

Wynik: x = 2, y = 3

D=-3, D_x=-6 i D_y=-9. x=D_x/D=2, y=D_y/D=3. Sprawdź podstawieniem.

06. Rozwiąż układ trzech równań eliminacją Gaussa.

Wynik: x = 1, y = 2, z = 3

Po eliminacji x otrzymasz -y-3z=-11 oraz -2y+z=-1. Odejmując dwukrotność pierwszego od drugiego: 7z=21. Następnie z=3, y=2 i x=1.

Działania na macierzach

07. Oblicz A + B dla macierzy 2×2.

$$\text{Wynik} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Macierze mają identyczne wymiary. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie przez skalar wykonujemy na każdym elemencie osobno. Przykładowo element (1,1): 1·(2) + (1)·(5) = 7. Powtórz dla wszystkich pól.

08. Oblicz A - B dla macierzy 2×3.

$$\text{Wynik} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Macierze mają identyczne wymiary. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie przez skalar wykonujemy na każdym elemencie osobno. Przykładowo element (1,1): 1·(4) + (-1)·(1) = 3. Powtórz dla wszystkich pól.

09. Oblicz 2A + B.

$$\text{Wynik} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Macierze mają identyczne wymiary. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie przez skalar wykonujemy na każdym elemencie osobno. Przykładowo element (1,1): 2·(1) + (1)·(2) = 4. Powtórz dla wszystkich pól.

10. Oblicz 3A - 2B.

$$\text{Wynik} = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -7 & 12 \end{pmatrix}$$

Macierze mają identyczne wymiary. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie przez skalar wykonujemy na każdym elemencie osobno. Przykładowo element (1,1): 3·(3) + (-2)·(1) = 7. Powtórz dla wszystkich pól.

11. Wyznacz macierz transponowaną A^T.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Pierwszy wiersz A staje się pierwszą kolumną A^T. Analogicznie postępuj z pozostałymi wierszami. Macierz 2×3 po transpozycji ma wymiar 3×2.

12. Sprawdź, czy macierz A jest symetryczna.

Wynik: Tak, A = A^T.

Macierz jest symetryczna, gdy $a_{ij} = a_{ji}$ dla każdej pary indeksów. Pary poza przekątną: a_{12}=a_{21}=-1, a_{13}=a_{31}=3, a_{23}=a_{32}=0.

13. Oblicz ślad macierzy A.

Wynik: tr(A) = 1

Ślad to suma a_{11}+a_{22}+a_{33}. tr(A) = 3 + 4 - 6 = 1.

14. Znajdź macierz X z równania X + A = B.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Odejmij A od obu stron równania: X = B - A. Wykonaj odejmowanie odpowiednich elementów obu macierzy.

Mnożenie macierzy

15. Oblicz AB dla dwóch macierzy 2×2.

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

A ma rozmiar 2×2, a B ma 2×2. Wewnętrzne wymiary są zgodne; wynik ma 2×2. Element (1,1): 1·(0), 2·(-1) = -2. Pozostałe elementy oblicz tak samo.

16. Oblicz BA dla macierzy z zadania 15.

$$BA = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Kolejność mnożenia ma znaczenie: teraz mnożymy wiersze B przez kolumny A. Element (1,1) = 0·1 + 4·3 = 12. Oblicz pozostałe trzy elementy i porównaj AB z BA.

17. Pomnóż macierz 2×3 przez macierz 3×2.

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

A ma rozmiar 2×3, a B ma 3×2. Wewnętrzne wymiary są zgodne; wynik ma 2×2. Element (1,1): 1·(2), 0·(0), 2·(4) = 10. Pozostałe elementy oblicz tak samo.

18. Pomnóż macierz 3×2 przez macierz 2×3.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

A ma rozmiar 3×2, a B ma 2×3. Wewnętrzne wymiary są zgodne; wynik ma 3×3. Element (1,1): 2·(1), 1·(-2) = 0. Pozostałe elementy oblicz tak samo.

19. Oblicz kwadrat macierzy A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A^2 oznacza iloczyn A·A, a nie podniesienie każdej liczby osobno do kwadratu. Element (1,1) = 2·2 + 1·1 = 5. Analogicznie wyznacz trzy pozostałe.

20. Oblicz AI dla macierzy jednostkowej I_3.

$$AI = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Każda kolumna I zawiera jedną jedynkę na przekątnej, dzięki czemu wybieramy odpowiedni element wiersza A. Iloczyn AI = A. To macierzowy odpowiednik mnożenia przez 1.

21. Pomnóż wiersz 1×3 przez kolumnę 3×1.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

A ma rozmiar 1×3, a B ma 3×1. Wewnętrzne wymiary są zgodne; wynik ma 1×1. Element (1,1): 2·(4), -1·(2), 3·(-2) = 0. Pozostałe elementy oblicz tak samo.

22. Pomnóż dwie macierze diagonalne.

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}$$

A ma rozmiar 2×2, a B ma 2×2. Wewnętrzne wymiary są zgodne; wynik ma 2×2. Element (1,1): 2·(4), 0·(0) = 8. Pozostałe elementy oblicz tak samo.

Wyznaczniki

23. Oblicz wyznacznik macierzy 2×2.

Wynik: det(A) = -10

Dla 2×2 użyj wzoru ad-bc, dla 3×3 rozwinięcia Laplace'a lub własności macierzy. Zastosuj ad - bc: (4)·(-1) - (2)·(3) = -10.

24. Oblicz wyznacznik macierzy 3×3.

Wynik: det(A) = 13

Dla 2×2 użyj wzoru ad-bc, dla 3×3 rozwinięcia Laplace'a lub własności macierzy. Rozwiń według pierwszego wiersza: 3 + (10) + (0) = 13.

25. Oblicz wyznacznik macierzy trójkątnej.

Wynik: det(A) = -12

Dla 2×2 użyj wzoru ad-bc, dla 3×3 rozwinięcia Laplace'a lub własności macierzy. Macierz jest trójkątna, więc mnożymy elementy przekątnej: 2 · 3 · -2 = -12.

26. Wyznacz det(A), gdy dwa wiersze są identyczne.

Wynik: det(A) = 0

Dla 2×2 użyj wzoru ad-bc, dla 3×3 rozwinięcia Laplace'a lub własności macierzy. Wiersze 1 i 3 są takie same, zatem det(A) = 0 bez liczenia rozwinięcia.

27. Porównaj det(A) i det(A^T).

Wynik: det(A) = det(A^T) = 11

Oblicz det(A) = 2·3 - 5·(-1) = 11. Transpozycja nie zmienia wyznacznika: det(A^T) = det(A) = 11.

28. Oblicz det(2A) dla A rozmiaru 2×2.

Wynik: det(2A) = -28

Najpierw det(A)=1·(-1)-3·2=-7. Dla n=2 mamy det(2A)=2^2·(-7)=-28.

29. Oblicz det(AB) bez mnożenia całych macierzy.

Wynik: det(AB) = 6

det(A)=1, det(B)=6. Iloczyn wyznaczników wynosi 1·6=6.

Macierz odwrotna

30. Wyznacz A^{-1} dla macierzy 2×2.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Najpierw oblicz det(A)=1. Ponieważ jest różny od zera, macierz odwrotna istnieje. Dla A=[[a,b],[c,d]] wzór to (1/det A)·[[d,-b],[-c,a]]. Wynik możesz sprawdzić mnożeniem AA^{-1}=I.

31. Wyznacz A^{-1}, gdy wyznacznik jest ujemny.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Najpierw oblicz det(A)=-1. Ponieważ jest różny od zera, macierz odwrotna istnieje. Dla A=[[a,b],[c,d]] wzór to (1/det A)·[[d,-b],[-c,a]]. Wynik możesz sprawdzić mnożeniem AA^{-1}=I.

32. Wyznacz A^{-1} z ułamkami w wyniku.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Najpierw oblicz det(A)=3. Ponieważ jest różny od zera, macierz odwrotna istnieje. Dla A=[[a,b],[c,d]] wzór to (1/det A)·[[d,-b],[-c,a]]. Wynik możesz sprawdzić mnożeniem AA^{-1}=I.

33. Sprawdź, czy macierz A jest odwracalna.

Wynik: Macierz A nie jest odwracalna.

Dla macierzy 2×2 wyznacznik jest równy ad-bc. det(A) = 1·4 - 2·2 = 0. Gdy det(A)=0, A^{-1} nie istnieje.

34. Rozwiąż równanie macierzowe AX = B.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ponieważ det(A)=1, macierz jest odwracalna. Mamy X=A^{-1}B. A^{-1} = [[1,-1],[-1,2]]. Po wymnożeniu przez B otrzymujemy X.

35. Sprawdź iloczyn AA^{-1}.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

det(A)=1, więc A^{-1} istnieje i wynosi [[1,-1],[-2,3]]. Wymnóż A·A^{-1}: elementy na przekątnej wynoszą 1, a poza nią 0.

Rząd macierzy

36. Wyznacz rząd odwracalnej macierzy 2×2.

Wynik: r(A) = 2

Sprowadź macierz do postaci schodkowej, nie zmieniając jej rzędu. Postać zredukowana ma wiersze: [1, 0]; [0, 1]. Liczba niezerowych wierszy: 2.

37. Wyznacz rząd macierzy z proporcjonalnymi wierszami.

Wynik: r(A) = 1

Sprowadź macierz do postaci schodkowej, nie zmieniając jej rzędu. Postać zredukowana ma wiersze: [1, -1/2]; [0, 0]. Liczba niezerowych wierszy: 1.

38. Wyznacz rząd macierzy 3×3 (rząd 2).

Wynik: r(A) = 2

Sprowadź macierz do postaci schodkowej, nie zmieniając jej rzędu. Postać zredukowana ma wiersze: [1, 0, -5]; [0, 1, 3]; [0, 0, 0]. Liczba niezerowych wierszy: 2.

39. Wyznacz rząd pełnej macierzy 3×3.

Wynik: r(A) = 3

Sprowadź macierz do postaci schodkowej, nie zmieniając jej rzędu. Postać zredukowana ma wiersze: [1, 0, 0]; [0, 1, 0]; [0, 0, 1]. Liczba niezerowych wierszy: 3.

40. Wyznacz rząd prostokątnej macierzy 3×2.

Wynik: r(A) = 2

Sprowadź macierz do postaci schodkowej, nie zmieniając jej rzędu. Postać zredukowana ma wiersze: [1, 0]; [0, 1]; [0, 0]. Liczba niezerowych wierszy: 2.

41. Wyznacz rząd prostokątnej macierzy 2×3.

Wynik: r(A) = 1

Sprowadź macierz do postaci schodkowej, nie zmieniając jej rzędu. Postać zredukowana ma wiersze: [1, -2, 3]; [0, 0, 0]. Liczba niezerowych wierszy: 1.

Układy równań

42. Rozwiąż układ 2×2 metodą Gaussa.

Wynik: x = 3, y = 1

Zapisz macierz rozszerzoną [A|b], wykonaj eliminację Gaussa na całych wierszach. Postać zredukowana: [1, 0, 3]; [0, 1, 1]. Odczytaj wartości niewiadomych z ostatniej kolumny.

43. Rozwiąż układ z ujemnymi współczynnikami.

Wynik: x = -2, y = 4

Zapisz macierz rozszerzoną [A|b], wykonaj eliminację Gaussa na całych wierszach. Postać zredukowana: [1, 0, -2]; [0, 1, 4]. Odczytaj wartości niewiadomych z ostatniej kolumny.

44. Rozwiąż układ trzech równań liniowych.

Wynik: x = 2, y = -1, z = 3

Zapisz macierz rozszerzoną [A|b], wykonaj eliminację Gaussa na całych wierszach. Postać zredukowana: [1, 0, 0, 2]; [0, 1, 0, -1]; [0, 0, 1, 3]. Odczytaj wartości niewiadomych z ostatniej kolumny.

45. Sprawdź, czy układ ma rozwiązanie.

Wynik: Układ sprzeczny — brak rozwiązań.

Drugie równanie ma lewą stronę dwukrotnie większą od pierwszego. Gdyby równania były zgodne, wyrazy wolne spełniałyby 8=2·3=6, a tak nie jest. r(A)=1, r([A|b])=2.

46. Wyznacz wszystkie rozwiązania układu zależnego.

Wynik: x = 5 - 2t, y = t, t $\in \mathbb{R}$

Drugie równanie jest dwukrotnością pierwszego, więc mamy tylko jeden niezależny warunek. Z równania x+2y=5 przyjmij y=t. Wtedy x=5-2t, gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą.

47. Rozwiąż układ 2×2 metodą Cramera.

Wynik: x = 2, y = -1

Wyznacznik współczynników D = 5. Wyznaczniki po podmianie kolumn: D_x=10, D_y=-5. x=D_x/D=2, y=D_y/D=-1. Po podstawieniu oba równania są spełnione.

Zadania przekrojowe

48. Rozwiąż równanie 2X + A = B.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Odejmij A stronami, a następnie podziel każdy element przez 2. Sprawdzenie: 2X + A odtwarza macierz B.

49. Dla jakich t macierz A jest osobliwa?

Wynik: t = -2 lub t = 2

det(A) = 1·4 - t·t = 4-t^2. Macierz jest osobliwa, gdy wyznacznik jest zerem. 4-t^2=0, zatem t^2=4 i t=-2 lub t=2.

50. Oblicz A^3, wykorzystując A^2.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A^2 = [[1,2],[0,1]], bo mnożysz macierz przez nią samą. A^3 = A^2·A, co daje [[1,3],[0,1]].