Pochodne funkcji

50 zadań do samodzielnego rozwiązania + odpowiedzi

Jak korzystać z arkusza

Najpierw rozwiąż zadania bez zaglądania do klucza. Odpowiedzi i krótkie wskazówki znajdziesz na końcu pliku. Przy różniczkowaniu pamiętaj o dziedzinie funkcji.

Dostępne online: https://calcula.com.pl/pochodne-zadania-z-rozwiazaniami.

Część I. Zadania

01. Wielomian

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 7$$

02. Funkcja złożona

$$f(x) = (2x^2 + 1)^3$$

03. Iloczyn

$$f(x) = x^2 \sin x$$

04. Iloraz

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

05. Pochodna w punkcie

$$f(x) = x^3 - 3x, \quad x_0 = 2$$

06. Ekstrema i monotoniczność

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

07. Wielomian trzeciego stopnia

$$f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 4$$

08. Wielomian piątego stopnia

$$f(x) = -2x^5 + 3x - 9$$

09. Wielomian z ułamkowym współczynnikiem

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - 4x^2$$

10. Trzy różne potęgi

$$f(x) = 7x^6 - 3x^4 + x$$

11. Wielomian siódmego stopnia

$$f(x) = 4x^7 - 5x^2 + 1$$

12. Najpierw uprość iloczyn nawiasów

$$f(x) = (x - 2)\,(x + 3)$$

13. Wielomian zapisany jako iloczyn

$$f(x) = x\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

14. Różnica kwadratów jako szybka metoda

$$f(x) = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right)$$

15. Pierwiastek kwadratowy

$$f(x) = \sqrt{x}$$

16. Odwrotność trzeciej potęgi

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

17. Potęga o wykładniku 3/2

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$$

18. Pierwiastek sześcienny

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

19. Odwrotność pierwiastka

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

20. Pierwiastek z funkcji kwadratowej

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

21. Sinus argumentu 3x

$$f(x) = \sin\left(3x\right)$$

22. Cosinus argumentu 2x

$$f(x) = \cos(2x)$$

23. Tangens

$$f(x) = \tan(x)$$

24. Iloczyn x oraz sinusa

$$f(x) = x \sin(x)$$

25. Kwadrat sinusa

$$f(x) = \sin^2(x)$$

26. Suma sinusa i cosinusa

$$f(x) = \sin(x) + 2\cos(x)$$

27. Eksponenta e do potęgi 2x

$$f(x) = e^{2x}$$

28. Funkcja wykładnicza o podstawie 3

$$f(x) = 3^x$$

29. Logarytm naturalny

$$f(x) = \ln(x)$$

30. Logarytm z wyrażenia liniowego

$$f(x) = \ln(5x + 1)$$

31. Iloczyn x i e^x

$$f(x) = xe^x$$

32. Logarytm o podstawie 2

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

33. Czwarta potęga trójmianu

$$f(x) = \left(x^2 - 3x\right)^4$$

34. Ujemna potęga wyrażenia liniowego

$$f(x) = \frac{1}{(4x + 1)^2}$$

35. Pierwiastek z trójmianu

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$$

36. Trzecia potęga sinusa

$$f(x) = \sin^3(x)$$

37. Eksponenta z funkcji kwadratowej

$$f(x) = e^{x^2+1}$$

38. Logarytm z x² + 1

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$$

39. Iloczyn dwóch wielomianów

$$f(x) = \left(x^2 + 1\right)\left(x^3 - 2\right)$$

40. Iloczyn x² i e^x

$$f(x) = x^2 e^x$$

41. Iloczyn x i cosinusa

$$f(x) = x\cos\left(x\right)$$

42. Iloraz dwóch funkcji liniowych

$$f(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$$

43. Iloraz liniowej i kwadratowej

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 1}$$

44. Logarytm podzielony przez x

$$f(x) = \frac{\ln\left(x\right)}{x}$$

45. Wartość pochodnej w punkcie x = 1

$$f(x) = 2x^3 - x^2, \quad x_0 = 1$$

46. Równanie stycznej w punkcie x = 1

$$f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 1$$

47. Monotoniczność paraboli

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

48. Dwa ekstrema funkcji sześciennej

$$f(x) = x^3 - 12x$$

49. Maksimum funkcji kwadratowej

$$f(x) = -x^2 + 4x + 1$$

50. Prędkość chwilowa z funkcji drogi

$$s(t) = t^2 + 3t, \quad t = 4$$

Klucz odpowiedzi

Zwięzłe wskazówki do wszystkich 50 zadań

01. Wielomian

$$f'(x) = 12x^3 - 4x + 5$$

Reguła potęgowa i pochodna sumy.

02. Funkcja złożona

$$f'(x) = 12x(2x^2 + 1)^2$$

Różniczkuj funkcję zewnętrzną i pomnóż przez pochodną wnętrza.

03. Iloczyn

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

Wzór (uv)′=u′v+uv′.

04. Iloraz

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

Stosuj (u′v−uv′)/v²; dziedzina x ≠ 1.

05. Pochodna w punkcie

$$f'(2) = 9$$

Oblicz f′(x)=3x²−3 i wstaw x=2.

06. Ekstrema i monotoniczność

maks. lokalne $(0, 0)$, min. lokalne $(2, -4)$

Pochodna to 3x(x−2); znaki +, −, +.

07. Wielomian trzeciego stopnia

$$f'(x) = 15x^2 - 14x$$

Korzystamy z reguły potęgowej dla każdego składnika.
Pochodna 5x³ to 15x², pochodna −7x² to −14x, a stała 4 znika.

08. Wielomian piątego stopnia

$$f'(x) = 3 - 10x^4$$

Zróżniczkujemy składniki −2x⁵, 3x i −9.
Dla wyrazu −2x⁵ mnożymy współczynnik przez wykładnik 5.

09. Wielomian z ułamkowym współczynnikiem

$$f'(x) = 2x\left(x^2 - 4\right)$$

Współczynnik 1/2 pozostaje przed pochodną x⁴.
Liczymy (1/2)·4x³ oraz −4·2x; potem upraszczamy.

10. Trzy różne potęgi

$$f'(x) = 42x^5 - 12x^3 + 1$$

Pochodna sumy jest sumą pochodnych.
Wykładniki 6 i 4 obniżają się o 1, a pochodna x wynosi 1.

11. Wielomian siódmego stopnia

$$f'(x) = 28x^6 - 10x$$

Różniczkujemy $4x^7$ i $-5x^2$ niezależnie.
Obliczamy $4 \cdot 7x^6$ oraz $-5 \cdot 2x$; pochodna 1 jest równa 0.

12. Najpierw uprość iloczyn nawiasów

$$f'(x) = 2x + 1$$

Możemy zastosować regułę iloczynu albo wymnożyć nawiasy.
Po wymnożeniu dostajemy x^2+x-6. Pochodna tej postaci to $2x+1$.

13. Wielomian zapisany jako iloczyn

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 6$$

Najpierw rozprowadzamy x po nawiasie.
Otrzymujemy x^3-5x^2+6x, a następnie różniczkujemy trzy składniki.

14. Różnica kwadratów jako szybka metoda

$$f'(x) = 4x^3$$

Rozpoznajemy wzór $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.
Wyrażenie upraszcza się do x^4-1; jego pochodna to $4x^3$.

15. Pierwiastek kwadratowy

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Zapisujemy pierwiastek jako x do potęgi 1/2.
Reguła potęgowa daje (1/2)x^(−1/2). Pochodna istnieje dla x > 0.

16. Odwrotność trzeciej potęgi

$$f'(x) = -\frac{3}{x^4}$$

Zamieniamy $1/x^3$ na x^(−3).
Po obniżeniu wykładnika o 1 otrzymujemy −3x^(−4). Dziedzina: $x \neq 0$.

17. Potęga o wykładniku 3/2

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

Zastosuj regułę $(x^n)' = nx^{n-1}$.
Po odjęciu 1 od wykładnika 3/2 zostaje 1/2. Wzór obowiązuje dla x > 0. W punkcie x = 0 pochodna dwustronna nie jest określona.

18. Pierwiastek sześcienny

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

Dla $x \neq 0$ zapisujemy pierwiastek jako x^(1/3).
Po zastosowaniu reguły potęgowej pojawia się 1/(3x^(2/3)). Dla $x \neq 0$; w punkcie x = 0 pochodna nie jest skończona.

19. Odwrotność pierwiastka

$$f'(x) = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

Zapisujemy 1/√x jako x^(−1/2).
Współczynnik to −1/2, a nowy wykładnik wynosi −3/2. Dziedzina: x > 0.

20. Pierwiastek z funkcji kwadratowej

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

To złożenie: funkcja zewnętrzna to pierwiastek, wewnętrzna to x²+4.
Mnożymy pochodną pierwiastka przez 2x, czyli pochodną wnętrza. Dziedzina i zbiór punktów różniczkowalności: wszystkie liczby rzeczywiste.

21. Sinus argumentu 3x

$$f'(x) = 3\cos(3x)$$

Stosujemy regułę łańcuchową.
Pochodna sinusu to cosinus; pochodna argumentu 3x wynosi 3.

22. Cosinus argumentu 2x

$$f'(x) = -2\sin(2x)$$

Pochodna cos u to −sin u razy u′.
Zapisujemy minus i dodatkowo mnożymy przez pochodną 2x, czyli 2.

23. Tangens

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Korzystamy z pochodnej tangensa.
Zapisujemy 1/cos²x, pamiętając o miejscach zerowych cosinusa. Dziedzina: cos x ≠ 0.

24. Iloczyn x oraz sinusa

$$f'(x) = x\cos(x) + \sin(x)$$

Ustal u=x i v=sin x; użyj (uv)′=u′v+uv′.
Pochodne czynników to 1 i cos x, stąd suma sin x + x cos x.

25. Kwadrat sinusa

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Funkcja zewnętrzna to kwadrat, wewnętrzna sin x.
Najpierw 2 sin x, potem mnożymy przez cos x.

26. Suma sinusa i cosinusa

$$f'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$$

Różniczkujemy każdy składnik oddzielnie.
Pochodna sin x to cos x, a pochodna 2cos x to −2sin x.

27. Eksponenta e do potęgi 2x

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

Pochodna e^u to e^u·u′.
Wewnętrzny argument 2x ma pochodną 2.

28. Funkcja wykładnicza o podstawie 3

$$f'(x) = 3^x \ln(3)$$

Dla a > 0 pochodna a^x to a^x·ln a.
Wstawiamy a=3. Logarytm naturalny z 3 to stały współczynnik.

29. Logarytm naturalny

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Korzystamy z pochodnej ln x.
Jej wartość wynosi 1/x na całej dziedzinie funkcji. Dziedzina: x > 0.

30. Logarytm z wyrażenia liniowego

$$f'(x) = \frac{5}{5x+1}$$

Stosujemy regułę (ln u)′=u′/u.
Pochodna argumentu 5x+1 to 5. Dziedzina: x > −1/5.

31. Iloczyn x i e^x

$$f'(x) = (x+1)\,e^x$$

Wybieramy u=x, v=e^x.
Z reguły iloczynu: 1·e^x + x·e^x; wyłączamy e^x.

32. Logarytm o podstawie 2

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln(2)}$$

Najpierw zmieniamy podstawę: $\log_2 x = \ln x / \ln 2$.
Stała 1/ln 2 zostaje przed pochodną ln x. Dziedzina: x > 0.

33. Czwarta potęga trójmianu

$$f'(x) = 4\,(2x-3)\left(x^2-3x\right)^3$$

Oddzielamy zewnętrzną potęgę 4 od wnętrza x^2-3x.
Mnożymy $4(x^2-3x)^3$ przez $2x-3$.

34. Ujemna potęga wyrażenia liniowego

$$f'(x) = -\frac{8}{(4x+1)^3}$$

Zastosuj regułę potęgową i łańcuchową.
Pochodna zewnętrzna daje −2(4x+1)^(−3), a pochodna wnętrza wynosi 4. Dziedzina: x ≠ −1/4.

35. Pierwiastek z trójmianu

$$f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$$

Wykorzystujemy pochodną pierwiastka z u.
Pochodną $u=3x^2+1$ jest 6x; skracamy 6x/2 do 3x.

36. Trzecia potęga sinusa

$$f'(x) = 3\sin^2(x)\cos(x)$$

Różniczkujemy zewnętrzny sześcian i wewnętrzny sinus.
Otrzymujemy $3\sin^2 x$, po czym mnożymy przez cos x.

37. Eksponenta z funkcji kwadratowej

$$f'(x) = 2xe^{x^2+1}$$

Pochodna e^u zachowuje e^u i dodaje mnożnik u′.
Tutaj u′=2x, więc przed eksponentą stoi 2x.

38. Logarytm z x² + 1

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Różniczkujemy ln u jako u′/u.
Pochodna wnętrza to 2x, mianownik pozostaje x²+1. Dziedzina: wszystkie liczby rzeczywiste.

39. Iloczyn dwóch wielomianów

$$f'(x) = 3x^2\left(x^2+1\right) + 2x\left(x^3-2\right)$$

Weź u=x²+1 oraz v=x³−2.
Podstawiamy u′=2x, v′=3x² do wzoru u′v+uv′.

40. Iloczyn x² i e^x

$$f'(x) = \left(x^2+2x\right)e^x$$

W regule iloczynu różniczkujemy każdy czynnik po kolei.
Otrzymujemy 2xe^x+x²e^x, czyli e^x(x²+2x).

41. Iloczyn x i cosinusa

$$f'(x) = -x\sin(x) + \cos(x)$$

Używamy wzoru (uv)′=u′v+uv′.
Ponieważ (cos x)′=−sin x, drugi składnik jest ujemny.

42. Iloraz dwóch funkcji liniowych

$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$$

Wzór na iloraz ma licznik u′v−uv′.
Licznik upraszcza się do (x+2)−(x+1)=1. Dziedzina: x ≠ −2.

43. Iloraz liniowej i kwadratowej

$$f'(x) = \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$$

Licznik u=2x−1, mianownik v=x²+1.
Podstawiamy u′=2 oraz v′=2x, następnie rozwijamy 2(x²+1)−(2x−1)2x. Dziedzina: wszystkie liczby rzeczywiste.

44. Logarytm podzielony przez x

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

Różniczkujemy iloraz ln x / x.
W liczniku mamy (1/x)·x−ln x·1=1−ln x. Dziedzina: x > 0.

45. Wartość pochodnej w punkcie x = 1

$$f'(1) = 4$$

Najpierw obliczamy pochodną funkcji, dopiero potem podstawiamy argument 1.
Pochodna ma postać 6x²−2x, więc po podstawieniu x=1 dostajemy 6−2. Współczynnik kierunkowy stycznej w punkcie x=1 wynosi 4.

46. Równanie stycznej w punkcie x = 1

$$y = 4x - 1$$

Obliczamy f(1)=3 oraz f′(1)=4. Styczna przechodzi przez punkt (1, 3).
Podstawiamy do równania y−3=4(x−1), a następnie je upraszczamy. Sprawdzenie: dla x=1 styczna ma wartość 3.

47. Monotoniczność paraboli

$$x_{\min} = 3, \quad f(3) = -4$$

Liczymy f′(x)=2x−6 i rozwiązujemy równanie f′(x)=0.
Dla x<3 pochodna jest ujemna, a dla x>3 dodatnia. Funkcja maleje na (−∞, 3) i rośnie na (3, +∞).

48. Dwa ekstrema funkcji sześciennej

$$f(-2) = 16, \quad f(2) = -16$$

Pochodna to 3x²−12=3(x−2)(x+2). Miejsca zerowe: −2 oraz 2.
Znaki pochodnej to kolejno +, −, +. W punkcie −2 jest maksimum, a w 2 minimum. Maksimum lokalne: (−2, 16). Minimum lokalne: (2, −16).

49. Maksimum funkcji kwadratowej

$$x_{\max} = 2, \quad f(2) = 5$$

Szukamy punktu, w którym pochodna −2x+4 znika.
Pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny przy x=2; to maksimum. Maksymalna wartość funkcji wynosi 5.

50. Prędkość chwilowa z funkcji drogi

$$v(4) = 11 \text{ m/s}$$

Droga jest mierzona w metrach, czas w sekundach. Prędkość chwilowa to pochodna drogi po czasie.
Mamy s′(t)=2t+3, a po podstawieniu t=4 otrzymujemy 11. Wynik podaje prędkość chwilową, a nie średnią z przedziału.